Préparation ds3-corrigé

Exercice 61 page 50 :

a) On considère l'inéquation $\dfrac{x+4}{2x-3}+\dfrac{2x-3}{x+4}\geqslant 0$.
Nous allons tout mettre au même dénominateur :
$\dfrac{x+4}{2x-3}+\dfrac{2x-3}{x+4}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+4)(x+4)}{(2x-3)(x+4)}+\dfrac{(2x-3)(2x-3)}{(2x-3)(x+4)}\geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{x^2+8x+16+4x^2-12x+9}{(2x-3)(x+4)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x^2-4x+25}{(2x-3)(x+4)}\geqslant 0.$
Si on considère le polynôme du second degré $x \longmapsto 5x^2-4x+25$ alors $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times 5\times 25=-486<0$. Comme $a=5>0$ on en déduit que $5x^2-4x+25>0$ pour tout réel x.

x	$-\infty$		-4		$1{,}5$		$+\infty$
$5x^2-4x+25$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{5x^2-4x+25}{(2x-3)(x+4)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Par conséquent $\mathcal{S}=]-\infty;-4[\cup]1{,}5;+\infty[$.

b) On considère l'inéquation $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-9}>\dfrac{1}{x}$.
Cette inéquation est équivalente à $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-9}-\dfrac{1}{x}>0$. Nous allons ensuite tout mettre au même dénominateur on trouve : $\dfrac{(x-9)x+(x-1)x-(x-1)(x-9)}{(x-1)(x-9)x}>0$. On obtient :
$\dfrac{x^2-9x+x^2-x-x^2+9x+x-9}{(x-1)(x-9)x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-9}{(x-1)(x-9)x}>0.$
Le polynôme $x\longmapsto x^2-9$ a pour racines -3 et 3 ; de plus $a=1>0$.
On obtient :

x	$-\infty$		-3		0		1		3		9		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-9$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{x^2-9}{(x-1)(x-9)x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

On obtient donc $\mathcal{S}=]-3;0[\cup]1;3[\cup]9;+\infty[$.

c) Considérons l'inéquation $\dfrac{5}{x+7}-\dfrac{2}{2x-1}>\dfrac{7}{9(x-1)}$. Cette inéquation est équivalente à $\dfrac{5}{x+7}-\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{7}{9(x-1)}>0$. On met les trois quotients au même dénominateur : on trouve
$\dfrac{5\times(2x-1)\times 9(x-1)-2(x+7)\times 9(x-1)-7(x+7)(2x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)}>0.$
On trouve donc $\dfrac{58x^2-334x+220}{9(x+7)(2x-1)(x-1)}>0$. Le polynôme $x\longmapsto 58x^2-334x+220$ vérifie $\Delta=60516>0$ et donc il y a deux racines distinctes qui sont après calculs $x_1=\dfrac{22}{29}$ et $x_2=5$.
De plus, $a=58>0$.

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		$\frac{22}{29}$		1		5		$+\infty$
$58x^2-334x+220$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-9}{(x-1)(x-9)x}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par conséquent, $\mathcal{S} =]-7;\frac{1}{2}[\cup]\frac{22}{29};1[\cup]5;+\infty[$.

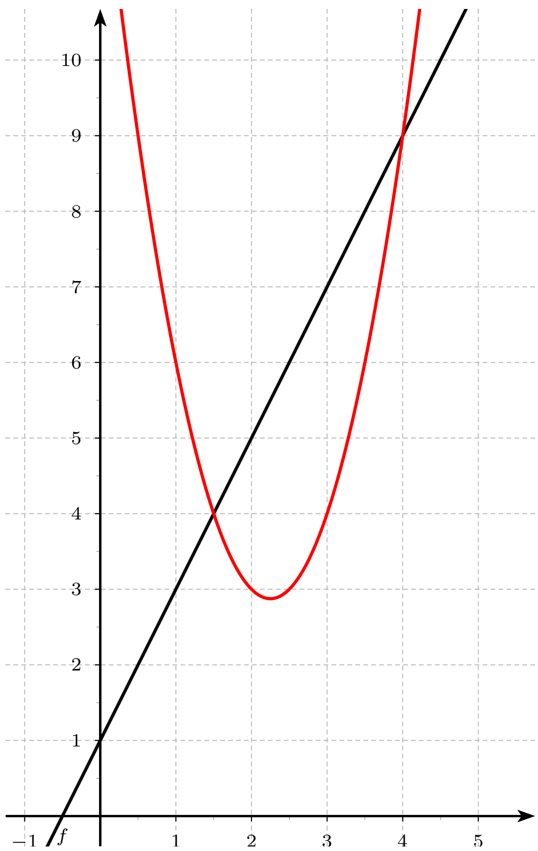
Exercice 62 page 50 :

a) Pour étudier la position relative de la droite et la parabole, il faut étudier le signe de $(2x+1)-(2x^2-9x+13)$. Cette expression est égale (après simplifications) à $-2x^2+11x-12$. On trouve $\Delta = b^2-4ac = 25 > 0$ donc il y a deux racines distinctes $x_1 = 4$ et $x_2 = 1{,}5$.
De plus $a = -2 < 0$ donc on trouve :

x	$-\infty$		$1{,}5$		4		$+\infty$
$-2x^2+11x-12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

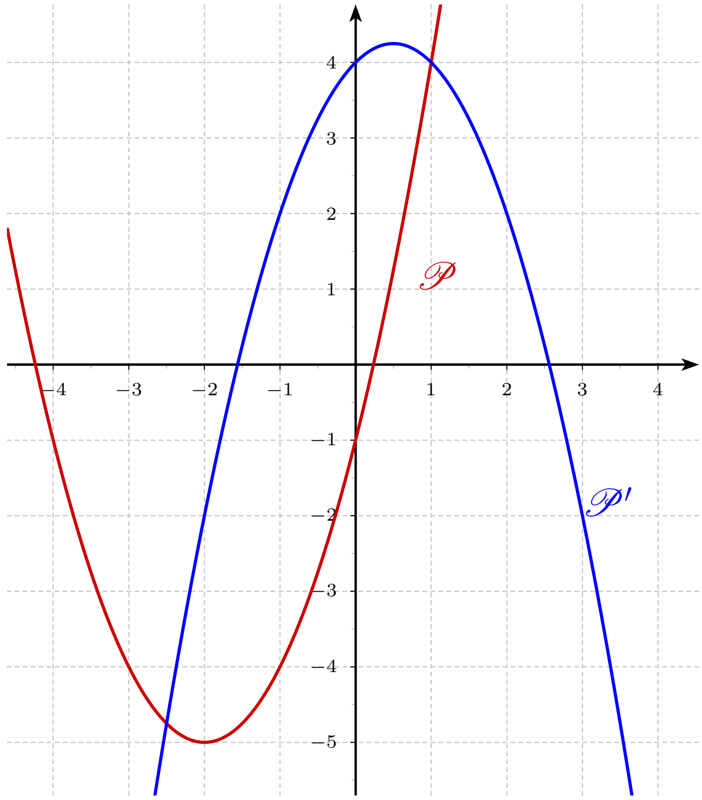
De ce tableau de signe on en déduit le signe de la différence $(2x+1)-(2x^2-9x+13)$. Par conséquent, nous en déduisons que la droite d'équation $y = 2x+1$ est en dessous de la parabole d'équation $y = 2x^2-9x+13$ sur $]-\infty;1{,}5[\cup]4;+\infty[$. La droite est au dessus de la parabole sur $]1{,}5;4[$. Enfin, la droite et la parabole se coupent pour $x = 1{,}5$ et $x = 4$.

b)



Exercice 63 page 50 :

a)



b) Graphiquement, on peut en déduire que $\mathscr{P}$ semble être au dessus de $\mathscr{P}'$ sur $]-\infty;-2{,}5[\cup]1;+\infty[$. De plus, $\mathscr{P}$ semble être en dessous de $\mathscr{P}'$ sur $]-2{,}5;1[$. Enfin, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ semblent se couper pour $x=-2{,}5$ et $x=1$.
c) Pour étudier la position relative des deux paraboles, il faut étudier le signe de $x^2+4x-1-(-x^2+x+4)$. On trouve l'expression $2x^2+3x-5$ qui est un polynôme du second degré. On trouve $\Delta=49>0$ donc il y a deux racines distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-2{,}5$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1$.
De plus, $a=2>0$ donc on obtient :

x	$-\infty$		$-2{,}5$		1		$+\infty$
$2x^2+3x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau permet de confirmer les résultats du b), car la différence $x^2+4x-1-(-x^2+x+4)$ est bien strictement positive sur $]-\infty;-2{,}5[\cup]1;+\infty[$ et donc $\mathscr{P}$ est bien au dessus de $\mathscr{P}'$ sur $]-\infty;-2{,}5[\cup]1;+\infty[$. Les autres résultats se confirment de la même façon.

Exercice 21 page 191 :
a) Médiane issue de A :
On note I le milieu de $[BC]$, alors $I\left(\dfrac{x_B+x_C}{2};\dfrac{y_B+y_C}{2}\right)$. On trouve donc $I(-2;5{,}5)$.
Nous cherchons une équation de la médiane (AI).
$\overrightarrow{AI}\binom{-12}{7{,}5}$ est un vecteur directeur de (AI) donc (AI) admet une équation cartésienne de la forme $7{,}5x+12y+c=0$. Comme $A\in(AI)$ on a $7{,}5\times10+12\times(-2)+c=0$ et donc $c=51$. Par conséquent, la médiane (AI) admet pour équation cartésienne $7{,}5x+12y+51=0$. Remarque : On peut aussi calculer le coefficient directeur $m=\dfrac{y_I-y_A}{x_I-x_A}$ et ensuite en déduire p pour trouver l'équation réduite de (AI).
Médiane issue de B :
On note J le milieu de $[AC]$, alors on trouve après calculs $J(2;5)$. Il faut déterminer une équation de la droite (BJ) avec $B(2;-1)$ et $J(2;5)$. Ces deux points ont la même abscisse donc la droite (BJ) admet pour équation $x=2$.
Médiane issue de C :
On note K le milieu de $[AB]$. On trouve après calculs $K(6;-1{,}5)$. Le vecteur $\overrightarrow{CK}\binom{12}{-13{,}5}$ est un vecteur directeur de (CK) donc la médiane (CK) admet une équation cartésienne de la forme $-13{,}5x-12y+c=0$. Comme $C\in(CK)$ on trouve $-13{,}5\times(-6)-12\times12+c=0$ et donc $c=63$. Par conséquent, la médiane (CK) admet pour équation cartésienne $-13{,}5x-12y+63=0$.
b) Si on remplace x par 6 dans les équations cartésiennes de (AI) et (CK) on trouve après calculs

$y = 3$. Cela signifie donc que le point $G(2;3)$ appartient aux trois médianes et donc ces trois droites sont concourantes (on vérifie évidemment que ces droites ne peuvent être parallèles).