*Classe de 1S4*

# Devoir maison 4-correction

## Exercice 1

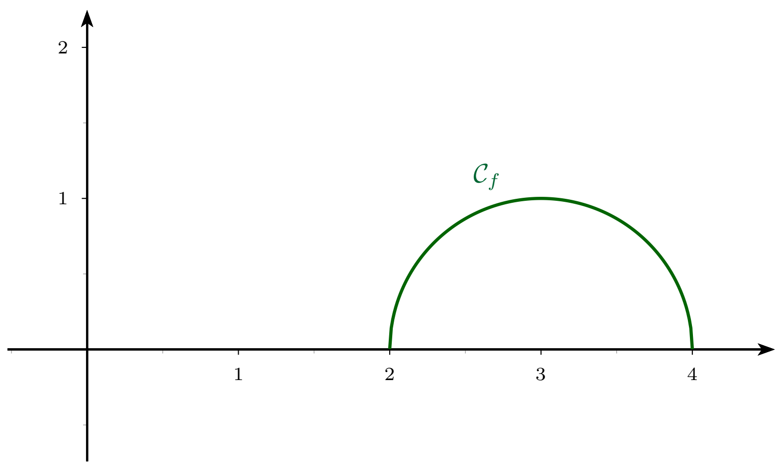
On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{-x^2+6x-8}$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$, noté $\mathscr{D}_f$.
$x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow -x^2+6x-8 \geqslant 0$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4$. Il y a donc deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 4$. De plus, $a = -1 < 0$ donc ce polynôme est négatif en dehors des racines. Par conséquent $\mathscr{D}_f = [2;4]$.

**2.** Déterminer le sens de variation de $x \longmapsto -x^2+6x-8$ sur $[2;3]$ et sur $[3;4]$.
On a $-\dfrac{b}{2a} = 3$ et $a = -1 < 0$ donc la fonction $x \longmapsto -x^2+6x-8$ est strictement croissante sur $[2;3]$ et strictement décroissante sur $[3;4]$.

**3.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathscr{D}_f$.
On pose $u(x) = -x^2+6x-8$ pour tout réel $x$.
Sur l'intervalle $[2;3]$ :
Soient $a \in [2;3]$, $b \in [2;3]$ avec $a < b$. D'après la question précédente, $u(a) < u(b)$ car $u$ est strictement croissante sur $[2;3]$. Par conséquent, $\sqrt{u(a)} < \sqrt{u(b)}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Par conséquent, $f(a) < f(b)$ et donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[2;3]$.
Sur l'intervalle $[3;4]$ :
On réitère le même raisonnement et cette fois $u$ est strictement décroissante sur $[2;3]$. Par conséquent au final, $f$ est strictement décroissante sur $[3;4]$.

**4.** Tracer dans un repère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$.




**5.** Prouver que la courbe $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle.
Il faut prouver que $\mathscr{C}_f$ est le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(3;0)$ et de rayon 1 situé au dessus de l'axe des abscisses.
$M(x;y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$ et $x \in [2;4]$. Comme $y = f(x)$, alors $y \geqslant 0$ et donc $M$ est situé au dessus de l'axe des abscisses. On a
$MA = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{-x^2+6x-8})^2} = \sqrt{x^2-6x+9-x^2+6x-8} = 1$. Par conséquent, $M$ appartient au demi-cercle $\mathcal{C}$.
Réciproquement, soit $M(x;y) \in \mathcal{C}$. Alors $AM = 1$ donc $\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 1$ et ainsi $y^2 = 1-(x-3)^2$. De plus, $y \geqslant 0$ donc $y = \sqrt{1-(x-3)^2} = \sqrt{-x^2+6x-8} = f(x)$ et donc $M \in \mathscr{C}_f$. On a donc prouvé $\mathscr{C}_f \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \subset \mathscr{C}_f$ donc $\mathscr{C}_f$ est bien le demi-cercle indiqué.

## Exercice 2

On considère la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{2x-5}{x+3}$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $g$, noté $\mathscr{D}_g$.
$x \in \mathscr{D}_g \Leftrightarrow x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. Par conséquent, $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

**2.** Prouver que pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g(x) = 2 - \dfrac{11}{x+3}$.
Soit $x \neq -3$, alors
$2 - \dfrac{11}{x+3} = \dfrac{2(x+3)-11}{x+3} = \dfrac{2x+6-11}{x+3} = \dfrac{2x-5}{x+3}$.
Par conséquent, nous avons prouvé $g(x) = 2 - \dfrac{11}{x+3}$ pour tout $x \in \mathscr{D}_g$.

**3.** En déduire le sens de variation de la fonction $g$ sur $\mathscr{D}_f$.
Méthode 1 :
Soient $a$ et $b$ appartenant à $\mathscr{D}_g$. Alors $g(a) - g(b) = (2 - \dfrac{11}{a+3}) - (2 - \dfrac{11}{b+3}) = \dfrac{11(a-b)}{(a+3)(b+3)}$ après calculs.
Soient $a \in ]-\infty;-3[$, $b \in ]-\infty;-3[$ avec $a < b$.
on voit facilement que $g(a) - g(b)$ est négatif donc $g(a) < g(b)$ et ainsi $g$ est strictement croissante sur $]-\infty;-3[$. On effectue le même raisonnement sur l'autre intervalle.
Méthode 2 :
Soient $a \in ]-\infty;-3[$, $b \in ]-\infty;-3[$ avec $a < b$.
Alors, $a+3 < b+3$ donc en prenant l'inverse $\dfrac{1}{a+3} > \dfrac{1}{b+3}$ et en multipliant par $-11$, on trouve $-\dfrac{11}{a+3} < -\dfrac{11}{b+3}$. Finalement, en ajoutant 2, on trouve $g(a) < g(b)$. Ainsi, la fonction $g$ est strictement croissante sur $]-\infty;-3[$.

## Exercice 3

Trouver une série statistique composée de 6 valeurs différentes telle que $\overline{x} = 2015$ et $\sigma = 2$. Justifier.
*Indication :* on appliquera les formules du cours et non la calculatrice. Il existe plusieurs réponses possibles.

Le premier objectif est de trouver 6 nombres $-c$, $-b$, $-a$, $a$, $b$ et $c$ tels que l'écart-type $\sigma = 2$. Il faut donc que la variance soit égale à 4. Si on choisit par example, $a = 1$ et $b = 2$, comme la variance est 4, on obtient aussitôt : $\dfrac{10+2c^2}{6} = 4$ ; on trouve ensuite $c^2 = 7$ et donc $c = \sqrt{7}$ ou $c = -\sqrt{7}$.
En prenant $c = \sqrt{7}$, nous obtenons donc $-\sqrt{7}$, $-2$, $-1$, 1, 2 et $\sqrt{7}$. On a clairement $\overline{x} = 0$ et forcément $\sigma = 2$. Il suffit alors d'ajouter 2015 à chacun des nombres.
On obtient donc les nombres :
$2015 - \sqrt{7}$, 2013, 2014, 2016, 2017 et $2015 + \sqrt{7}$.
Alors, la moyenne augmente de 2015 et l'écart-type ne varie pas donc il est toujours égal à 2. On a donc $\overline{x} = 2015$ et $\sigma = 2$.