Classe de 1S4

Variations de fonctions : fiche de révisions

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x-7}{x-5}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$?
$x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$. Par conséquent, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{5\}$.

2. Prouver que pour tout réel $x \neq 5$, $f(x) = 3 + \dfrac{8}{x-5}$.
Soit $x \neq 5$,

$$3 + \frac{8}{x-5} = \frac{3x-15}{x-5} + \frac{8}{x-5} = \frac{3x-7}{x-5} = f(x).$$

Par conséquent, $f(x) = 3 + \dfrac{8}{x-5}$ pour tout réel $x \neq 5$.

3. Prouver que f est strictement décroissante sur $]5;+\infty[$.
Soient $a \in]5;+\infty[$, $b \in]5;+\infty[$ et $a < b$.

Alors $a-5 < b-5$ (on a soustrait 5) ; puis par inverse $\dfrac{1}{a-5} > \dfrac{1}{b-5}$. En multipliant par 8, nous trouvons $\dfrac{8}{a-5} > \dfrac{8}{b-5}$. Enfin en additionnant 3, on obtient $3 + \dfrac{8}{a-5} > 3 + \dfrac{1}{a-5}$, ce qui correspond à $f(a) > f(b)$. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]5;+\infty[$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1-x}$ définie sur $R\backslash\{1\}$.

1. Prouver que $f(x) = -1 - \dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.

$-1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1-x}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-x}{x-1} = \dfrac{x}{1-x}$. Par conséquent, $f(x) = -1 - \dfrac{1}{x-1}$ pour tout réel x différent de 1.

2. Prouver que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
Soient $a \in]1;+\infty[$, $b \in]1;+\infty[$ et $a < b$.

On soustrait 1 et on trouve $a-1 < b-1$. Puis on prend l'inverse donc $\dfrac{1}{a-1} > \dfrac{1}{b-1}$. On multiplie ensuite par -1 donc $-\dfrac{1}{a-1} < -\dfrac{1}{b-1}$. Enfin, on ajoute -1 et donc $-1 - \dfrac{1}{a-1} < -1 - \dfrac{1}{b-1}$. Ce qui donne $f(a) < f(b)$. Par conséquent, f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.